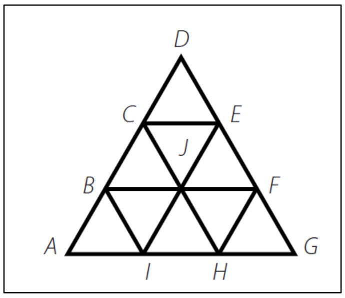
GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

I. VECTORES LIBRES

1. Dada la siguiente figura, calcula gráficamente los siguientes vectores:

- **a.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$
- **b.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EF}$
- **c.** $\overrightarrow{IH}+2\overrightarrow{BC}$
- **d.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JF}+\overrightarrow{DC}$
- **e.** $\overrightarrow{HG}+2\overrightarrow{CJ}+2\overrightarrow{CB}$



2. Estudia si las siguientes parejas de vectores forman una base:
a. $\vec{u}=(2,-3),\vec{v}=(5,4)$ **b.** $\vec{u}=(0,-2),\vec{v}=(4,1)$

3. Demuestra que los vectores $\vec{u}=(-1,3),\vec{v}=(5,-2)$ forman una base y determina las coordenadas del vector $\vec{w}=(-3,2)$ respecto de esa base.

4. Expresa el vector $\vec{a}=(-1,-8)$ como combinación lineal de $\vec{b}=(3,-2)$ y $\vec{c}=\left(4,-\frac{1}{2}\right)$.

5. Determina, de manera razonada, el punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos $A(-4,5)$ y $B(2,7)$.

6. Dados $A(-3,-2)$ y $B(1,5)$ determina las coordenadas de un punto P del segmento $\overline{AB}$ que se encuentre a doble distancia de A que de B.

7. Calcula las coordenadas del punto simétrico de $P(2,-5)$ respecto del punto $Q(1,6)$.

8. Dado el punto $P(-2,6)$, determina su simétrico respecto del punto $Q(2,-5)$.

9. Si $A(3,1)$, $B(5,7)$ y $C(6,4)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, calcula las coordenadas del otro vértice.

10. Determina k para que los puntos $A(-3,5)$, $B(2,1)$ y $C(6,k)$ estén alineados.

11. Halla el punto simétrico de $P(1,-2)$ respecto del punto $Q(3,0)$.

12. Determina los puntos P y Q del segmento $\overline{AB}$ que lo dividen en tres partes iguales, siendo $A(3,4)$ y $B(0,-2)$.

13. Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo ABCD, siendo $A(3,4)$, $B(5,-1)$ y $C(6,3)$.

14. Dados los puntos $A(3,7)$, $B(4,9)$, $C(-4,3)$ y $D(4,9)$, ¿son paralelos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$?

15. Dos vértices consecutivos de un hexágono regular centrado en el origen de coordenadas son $A(4,0)$ y $B\left(2,2\sqrt{3}\right)$. Calcula las coordenadas de los otros vértices.

II. PRODUCTO ESCALAR

16. Si $\vec{u}=(3,1)$ y $\vec{v}=(2,-1)$, calcula:

a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$

b. $\vec{u}\cdot 2\vec{v}$

c. $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot\vec{v}$

d. $\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

17. Determina el módulo de los vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{a}+\vec{b}$ y $2\vec{b}-\vec{c}$, dados $\vec{a}=(-3,4)$, $\vec{b}=(-5,-12)$ y $\vec{c}=(3,-1)$.

18. Calcula el ángulo que forman las siguientes parejas de vectores:

a. $\vec{a}=(-1,5)$ y $\vec{b}=(3,2)$

b. $\vec{c}=(1,\sqrt{3})$ y $\vec{d}=(-1,\sqrt{3})$

c. $\vec{e}=(-6,4)$ y $\vec{f}=(-9,6)$

d. $\vec{g}=(2,-5)$ y $\vec{h}=(4,2)$

e. $\vec{i}=\left(\frac{1}{3},-1\right)$ y $\vec{j}=(\sqrt{2},2)$

19. Calcula m para que los vectores $\vec{u}=(8,-6)$ y $\vec{v}=(m,3)$ formen un ángulo de 60º.

20. Considera A, B, C y D los vértices de un cuadrado de lado 1. Calcula:

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

b. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$

c. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$

d. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$

21. Dados $\vec{u}=(-1,2)$, $\vec{v}=(3,t)$, determina t para que $\vec{u}\cdot\vec{v}=7$.

22. Halla el valor de m para que el módulo de $\vec{u}=\left(\frac{3}{5},m\right)$ sea igual a 1.

23. Indica si los siguientes vectores son perpendiculares o paralelos:

a. $\vec{a}=(-2,4)$ y $\vec{b}=(3,2)$

b. $\vec{c}=(4,-3)$ y $\vec{d}=(6,8)$

24. Determina un vector $\vec{u}$ que sea perpendicular a $\vec{v}=(3,5)$ y cumpla que $|\vec{u}|=2\sqrt{34}$.

25. Dado el vector $\vec{p}=(6,2)$, obtén un vector $\vec{q}$ con módulo $\sqrt{89}$ y tal que $\vec{p}\cdot\vec{q}=14$.

26. Halla las coordenadas del vector $\vec{v}=(x,y)$, ortogonal a $\vec{u}(3,4)$ y que mida el doble que $\vec{u}$.

27. Calcula el valor de m para que $\vec{u}=(7,-2)$ y $\vec{v}=(m,6)$:

a. Sean paralelos.

b. Sean perpendiculares.

c. Tengan igual módulo.

28. Dados $\vec{a}=(2,1)$ y $\vec{b}=(6,2)$, halla un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v}\perp\vec{b}$ y $\vec{v}\cdot\vec{a}=1$.

29. Halla el valor de m y n para que los vectores $\vec{a}=(3,m)$ y $\vec{b}=(n,-1)$ sean perpendiculares y se verifique que $|\vec{a}|=5$.

30. Dado el vector $\vec{u}=(-5,k)$, calcula k de modo que:

- **a.** $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}=(4,-2)$.
- **b.** El módulo de $\vec{u}$ sea $\sqrt{34}$.

31. ¿Podrías calcular un vector $\vec{a}$ tal que $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$, siendo $\vec{b}=(2,1)$, y que sea ortogonal a $\vec{c}=(2,6)$?

32. Siendo $\vec{u}=(5,-b)$ y $\vec{v}=(a,2)$, halla a y b sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y que $|\vec{v}|=\sqrt{13}$.

33. De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=5$ y que forman un ángulo de 120^{o}. Calcula $|\vec{a}-\vec{b}|$.

34. Sabiendo que $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=5$ y $\vec{u}\perp\vec{v}$, halla $|\vec{u}+\vec{v}|$.

35. Calcula x para que los vectores $\vec{a}=(7,1)$ y $\vec{b}=(1,x)$ formen un ángulo de 45^{o}.

36. Calcula a y b para que los vectores $\vec{u}=(a,4)$ y $\vec{v}=(b,14)$ formen un ángulo de 45º y $|\vec{u}|=5$.

III. ECUACIONES DE RECTAS

37. Comprueba si el punto $P(13,-18)$ pertenece a alguna de las siguientes rectas:

- **a.** $r_1\equiv 2x-y+5=0$
- **b.** $r_2\equiv\begin{cases}x=12+t\\ y=-5+13t\end{cases}$
- **c.** $r_3\equiv 3y+54=0$
- **d.** $r_4\equiv x-13=\dfrac{y-10}{-1}$

38. Halla el valor de k para que la recta $x+ky-7=0$ contenga al punto $P(5,-2)$.

39. Obtén para cada una de las siguientes rectas, un vector director, un vector normal u ortogonal y su pendiente:

- **a.** $r_1\equiv\begin{cases}x=2t-1\\ y=5t\end{cases}$
- **b.** $r_3\equiv x+3=0$
- **c.** $r_2\equiv\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{1-y}{4}$
- **d.** $r_1\equiv y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

40. Escribe las ecuaciones de la recta, en todas sus formas, que verifican:

- **a.** Pasa por el punto $P(-3,1)$ y tiene como vector director $\vec{v}=(4,-3)$.
- **b.** Pasa por los puntos $A(2,1)$ y $B(5,-2)$.
- **c.** Tiene pendiente -3 y pasa por el punto $P(2,0)$.

41. Determina la ecuación en forma continua de la recta $r: 2x-3y+5=0$.

42. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta $y=\dfrac{2x-4}{3}$.

43. Determina la ecuación punto-pendiente de la recta $r:(x,y)=(-1,4)+\lambda(5,1)$.

44. Escribe la ecuación vectorial de la recta $r: 5x-3y-1=0$.

45. Dada la recta $r\equiv\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=2+\lambda\end{cases}$, escribe las ecuaciones (en forma explícita) de las siguientes rectas:

- **a.** Paralela a r que pasa por $A(-1,-3)$.
- **b.** Perpendicular a r que pasa por $B(-2,5)$.

46. Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(1,-3)$ y es:

- **a.** Paralela a la recta $2x-3y+5=0$. En forma paramétrica.
- **b.** Perpendicular a la recta $x+y-3=0$. En forma continua.
- **c.** Paralela a la recta $2y-3=0$.
- **d.** Perpendicular a la recta $x+5=0$.

47. Halla la ecuación de la paralela a $2x-3y=0$ cuya ordenada en el origen es -2.

48. Dada la recta $4x+3y-6=0$, escribe la ecuación de una recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.

49. Escribe las ecuaciones paramétricas de las siguientes rectas:

- **a.** Su vector de posición es $\vec{a}=(-3,1)$ y su vector de dirección es perpendicular a $\vec{v}=(0,-2)$.
- **b.** Pasa por $A(1,3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $2x-3y+6=0$.
- **c.** Pasa por $A(5,-2)$ y es paralela a $r\equiv\begin{cases}x=1-t\\ y=2t\end{cases}$.
- **d.** Es perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ en su punto medio, siendo $P(0,4)$ y $Q(-6,0)$.

50. De una cierta recta r conocemos su pendiente $m=\dfrac{2}{3}$. Halla la recta s en cada caso:

- **a.** La recta s es paralela a r y pasa por el origen de coordenadas.
- **b.** La recta s es perpendicular a la recta r y contiene al punto $P(1,2)$.

IV. HAZ DE RECTAS

51. Halla la recta del haz de centro $P(5,-1)$ que pasa por $Q(6,4)$.

52. Las rectas $r: 2x-5y+4=0$ y $s: x+4y-3=0$ forman parte de un mismo haz. ¿Cuál es la recta de dicho haz que pasa por el punto $(3,-2)$.

53. Las rectas $r: y=3$ y $s: y=2x-1$ forman parte del mismo haz de rectas. Halla la ecuación de la recta de dicho haz de pendiente -2.

54. Los haces de rectas cuyos centros son $P(4,0)$ y $Q(-6,4)$ tienen una recta en común. Determina su ecuación general.

55. Determina el centro del haz de rectas de ecuación $2kx+2y-3k+4=0$.

V. POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS

56. Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a. $r \equiv \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-10t-3 \end{cases}$ $\quad s \equiv 5x+y+7=0$

b. $r \equiv 3x+5y+10=0$ $\quad s \equiv -3x+5y+10=0$

c. $r \equiv \begin{cases} x=3t-1 \\ y=t+3 \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2t \end{cases}$

57. Dada la recta $r: 2x-5y-12=0$, determina la posición relativa de:

a. r y $s_1: \begin{cases} x=-11+3t \\ y=2-t \end{cases}$

b. r y $s_2: \begin{cases} x=6+5t \\ y=2t \end{cases}$

c. r y $s_3: \begin{cases} x=4+5t \\ y=7+2t \end{cases}$

58. Determina la posición relativa de las rectas r y s, siendo r la recta que pasa por el punto $P(-3,1)$ y es perpendicular a la recta $2x+5y-1=0$; y s, la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta

$$t: \frac{1-x}{2} = \frac{y+3}{-2}$$

59. Determina el valor de k para que las rectas r y s sean paralelas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} \qquad s \equiv \frac{x+5}{-6} = \frac{x-1}{k}$$

60. Calcula el valor de los parámetros k y t para que las siguientes rectas se corten en el punto $A(1,2)$:

$$r: kx - ty - 4 = 0$$
$$s: 2tx + ky - 2 = 0$$

61. Halla el valor de k para que las siguientes rectas sean coincidentes:

$$r \equiv \begin{cases} x = -6\lambda + k \\ y = 4\lambda + 2 \end{cases} \qquad s \equiv 2x + 3y + 5 = 0$$

62. Dada la recta $r: \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + k\lambda \end{cases}$, calcula el valor de k para que sea paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

VI. ÁNGULO QUE FORMAN DOS RECTAS

63. Calcula los ángulos que forma la recta $2x - y + 5 = 0$ con el eje de abcisas y el eje de ordenadas.

64. Calcula los ángulos que determina la recta r que pasa por los puntos $P(2,-5)$ y $Q(1,6)$ con la bisectrices del primer y segundo cuadrante.

65. Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

- **a.** $r_1: y = 2x + 5 \quad ; \quad s_1: y = -3x + 1$
- **b.** $r_2: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \end{cases} \quad ; \quad s_2: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$
- **c.** $r_3: 3x - 5y + 7 = 0 \quad ; \quad s_3: 10x + 6y - 3 = 0$
- **d.** $r_4: 2x - y = 0 \quad ; \quad s_4: 2y + 3 = 0$
- **e.** $r_5: \dfrac{2-x}{3} = \dfrac{y-1}{2} \quad ; \quad s_5: y - 2 = -3\cdot(x-1)$

66. Calcula el ángulo que forman la mediatriz del segmento de extremos $P(7,-1)$ y $Q(0,-2)$ con la recta $r: y = -3x + 7$.

67. Calcula n tal que la recta $3x + ny - 2 = 0$ forme un ángulo de 60° con el eje OX.

68. Calcula m y n en las rectas de ecuaciones $r: mx - 2y + 5 = 0 \quad ; \quad s: nx + 6y - 8 = 0$, sabiendo que r pasa por el punto $P(1,4)$ y que r y s forman un ángulo de 45°.

69. Dadas $r: 2x - y - 17$ y $s: 3x - ky - 8 = 0$, calcula el valor de k para que r y s se corten formando un ángulo de 60°.

VII. DISTANCIAS EN EL PLANO

70. Halla la distancia entre los puntos:

a. $P_1(-4,-5)$ y $Q_1(0,7)$

b. $P_2(2,-5)$ y $Q_2(1,-2)$

c. $P_3(-3,-2)$ y $Q_3(2,-6)$

71. Halla la distancia del punto $P(-2,5)$ a las rectas:

a. $r: \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{3-y}{3}$

b. $s: \begin{cases} x = 3-5\lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}$

c. Recta t que pasa por $Q(-3,0)$ y es paralela a la recta $2x-y+3=0$.

72. Halla la distancia entre las siguientes parejas de rectas:

a. $r: x-2y+8=0$ y $r': -2x+4y-7=0$

b. $s: \dfrac{x-2}{3} = y+4$ y $s': 2x-6y+3=0$

73. Calcula k de modo que la distancia entre los puntos $A(5,k)$ y $B(3,-2)$ sea igual a 2.

74. Halla la longitud del segmento que determina la recta $x-2y+5=0$ al cortar los ejes de coordenadas.

75. Halla la longitud de la mediana que parte de A en el triángulo que tiene por vértices $A(-1,4)$, $B(6,5)$ y $C(10,-3)$. ¿Coincide la mediana con la altura del triángulo?

76. Determina c para que la distancia de la recta $r \equiv x-3y+c=0$ al punto $(6,2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades.

VIII. PROBLEMAS

77. Consideremos el haz de rectas de centro $(3,-2)$.

a. Escribe la ecuación de ese haz de rectas.

b. Halla la ecuación de la recta de este haz que pasa por el punto $(-1,5)$.

c. ¿Qué recta del haz es paralela a $2x+y=0$?

d. Halla la recta del haz cuya distancia al origen es igual a 3.

78. Halla el área del triángulo de vértices $A(-1,2)$, $B(4,7)$ y $C(7,0)$.

79. La recta $r: 2x+3y-6=0$ determina, al cortar los ejes de coordenadas, el segmento $\overline{AB}$ y halla la mediatriz de dicho segmento.

80. Halla el pie de la perpendicular trazada desde el punto $P(1,-2)$ a la recta $r: x-2y+4=0$.

81. Dados los puntos $A(-1,1)$ y $B(5,3)$, determina en cada caso, la condición que deben cumplir las coordenadas de $C(x,y)$ para que el triángulo ABC, sea:

a. Isósceles, con el lado AB desigual.
b. De área 5.
c. Equilátero.
d. Rectángulo en C.

82. Del triángulo de vértices $A(1,3)$, $B(-2,4)$ y $C(-3,0)$ calcula:

a. La altura que parte de B.
b. La mediana que parte de A.
c. La mediatriz correspondiente al lado $\overline{AB}$.

83. Del triángulo de vértices $A(-2,3)$, $B(5,1)$ y $C(3,-4)$ calcula el baricentro, ortocentro y circuncentro.

84. Halla el área del cuadrilátero de vértices $A(-4,5)$, $B(0,5)$ $C(4,-2)$ y $D(-3,-2)$ (no tiene que ser un paralelogramo).

85. Determina, en cada caso, el punto simétrico de $A(6,3)$ respecto de las rectas:

a. $r: x+2y-2=0$
b. $s: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{2-y}{2}$

86. Determina la ecuación general de la recta simétrica de la recta $s: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=-3 \end{cases}$ respecto de la recta $r: y-3=\dfrac{x+2}{2}$.

87. Halla el punto de la recta $r: 3x-4y+8=0$ que equidista de $A(-6,0)$ y $B(0,-6)$.

88. Calcula c para que la distancia entre las rectas $r: 4x+3y-6=0$ y $s: 4x+3y+c=0$ sea igual a 3.

89. Halla los puntos de la recta $y=-x+2$ que equidistan de las rectas $r: x+2y-5=0$ y $s: 4x-2y+1=0$.

90. El lado desigual de un triángulo isósceles ABC, tiene por extremos $A(1,-2)$ y $B(4,3)$. El vértice C está en la recta $3x-y+8=0$. Halla las coordenadas de C y el área del triángulo.

91. La recta $2x+y=0$ es la bisectriz de un ángulo recto de vértice $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$. Halla las ecuaciones de los lados del ángulo.

92. Los puntos $P(-2,4)$ y $Q(6,0)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo que tiene el centro en el origen de coordenadas. Halla los otros dos vértices y los ángulos del paralelogramo.

93. El rombo ABCD tiene un vértice en el eje de ordenadas. Otros dos vértices opuestos son $B(-1,-1)$ y $D(-5,3)$. Halla las coordenadas de los otros vértices y el área del rombo.

94. Determina el área del triángulo que tiene sus lados sobre las rectas:

$$r: x = 3 \quad ; \quad s: 2x + 3y - 6 = 0 \quad ; \quad t: x - y - 7 = 0$$

95. Halla un punto de la recta $r \equiv 2x - 4y - 1 = 0$ que con el origen de coordenadas y el punto $P(-4,0)$ determina un triángulo de área 6.

96. Un punto P, que es equidistante de los puntos $A(3,4)$ y $B(-5,6)$, dista doble del eje de abcisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son las coordenadas de P?

97. De todas las rectas que pasan por el punto $A(1,2)$, halla la pendiente de aquella cuya distancia al origen es 1.

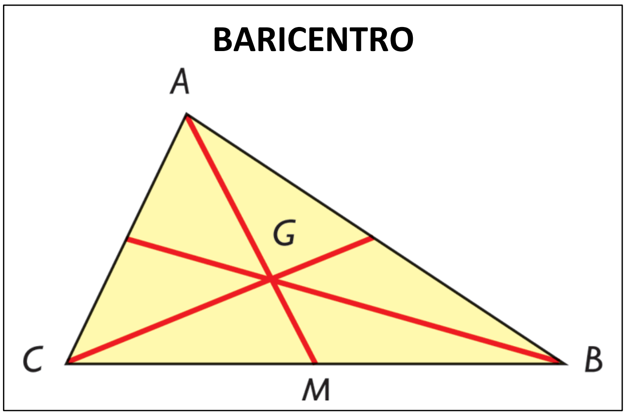
98. Dado el triángulo de vértices $A(-4,-2)$, $B(-1,5)$ y $C(5,1)$, halla las rectas r y s que parten de B y cortan a AC dividiendo el triángulo en tres triángulos de igual área.

99. Un cuadrado tiene una diagonal sobre la recta $x + 5y - 6 = 0$ y uno de sus vértices es $A(-2,-1)$. Halla los otros vértices y la longitud de la diagonal.

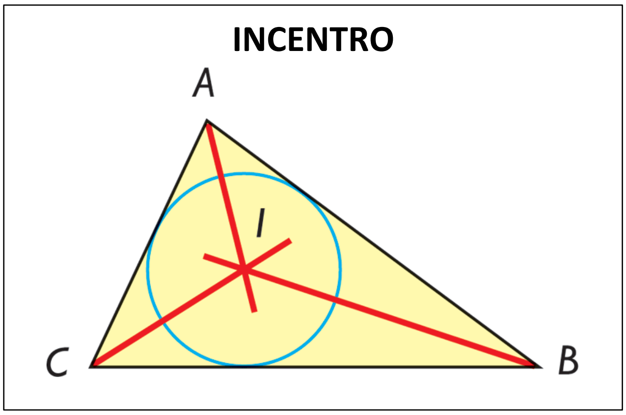
100. La diagonal menor de un rombo mide lo mismo que su lado y tiene por extremos los puntos $A(-3,-2)$ y $C(1,2)$. Halla los vértices B y D y el perímetro del rombo.

RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

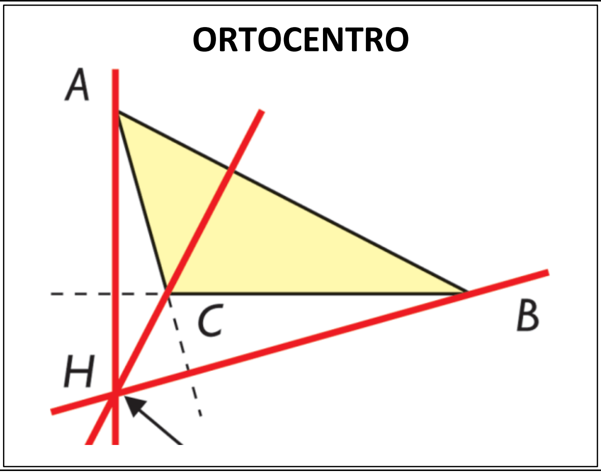
Las **medianas** de un triángulo son rectas que pasan por cada uno de sus vértices y el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas se cortan en un punto que se denomina **Baricentro**.



Las **bisectrices** de un triángulo son rectas que pasan por cada uno de sus vértices y que dividen en dos ángulos iguales el ángulo correspondiente a cada uno de los vértices. También se pueden definir como las rectas que pasando por cada uno de sus vértices equidistan de los lados adyacentes al vértice del triángulo. Las tres bisectrices se cortan en un punto que se denomina **Incentro**.



Las **alturas** de un triángulo son rectas que pasan por cada uno de sus vértices y son perpendiculares al lado opuesto. Las tres alturas se cortan en un punto que se denomina **Ortocentro**.



Las **mediatrices** de un triángulo son rectas perpendiculares a cada uno de sus lados en su punto medio. Las tres medianas se cortan en un punto que se denomina **Circuncentro**.