EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA

1. Sabiendo que $\cot g\alpha = -2$ y que $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, determina:

a. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ **d.** $\sec(-\alpha)$

b. $\operatorname{sen}(\pi+\alpha)$ **e.** $\cot g(\pi-\alpha)$

c. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ **f.** $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

2. Hallar el valor de las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi/2+x)+\cos(\pi-x)+\operatorname{sen}(\pi-x)}{\cos(-x)+\operatorname{sen}(-x)}$

b. $\dfrac{\cot g(\pi/2-x)\cdot\operatorname{sen}(\pi/2+x)}{2\operatorname{tg}(\pi-x)}$

c. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-x)\cdot\cos(-x)}{\cot g(\pi+x)\cdot\cos(\pi/2-x)}$

3. Determina el valor de $\cot g\frac{\alpha}{2}$, sabiendo que $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ y $\alpha \in \text{III}\,C$.

4. Sea $\cos\alpha = a > 0,\ \alpha \in \text{I}C$. Determina, en función de a, el valor de

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha + 3\cos\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}$$

5. Determinar el valor de A, siendo:

$$A = \frac{1-\cos^2 210^\circ}{\operatorname{sen}330^\circ + \operatorname{sen}450^\circ} + \frac{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cot g\frac{7\pi}{4}}{\operatorname{cosec}^2(-300^\circ)}$$

6. Si $\operatorname{sen}A = b,\ 0^\circ < A < 90^\circ$, determinar, en función de b, el valor de:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-A\right)+\operatorname{tg}(\pi-A)}{\cot g\left(\frac{\pi}{2}+A\right)-\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}+A\right)}$$

7. Demostrar que: $\text{sen}125^{\circ} - \cos 25^{\circ} = -\text{sen}5^{\circ}$

8. Si $\text{sen}28^{\circ} = a$, demostrar que:

$$\frac{\cos 208^{\circ} \cdot \text{tg}152^{\circ} + \text{sen}298^{\circ} - a}{\text{tg}242^{\circ} \cdot \cos 118^{\circ} + \sqrt{1-a^2} \cdot \sec^2\left(-28^{\circ}\right)} = \frac{a^2 - 1}{a^2}$$

9. Si $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ y $\alpha \in \text{IIC}$, determina el valor de $\cos 2\alpha$ y $\cos\frac{\alpha}{2}$, indicando a qué cuadrante pertenece cada uno.

10. Si $\text{cosec}2\alpha = -\frac{5}{4}$, con $2\alpha \in \text{IVC}$, determina el valor de:

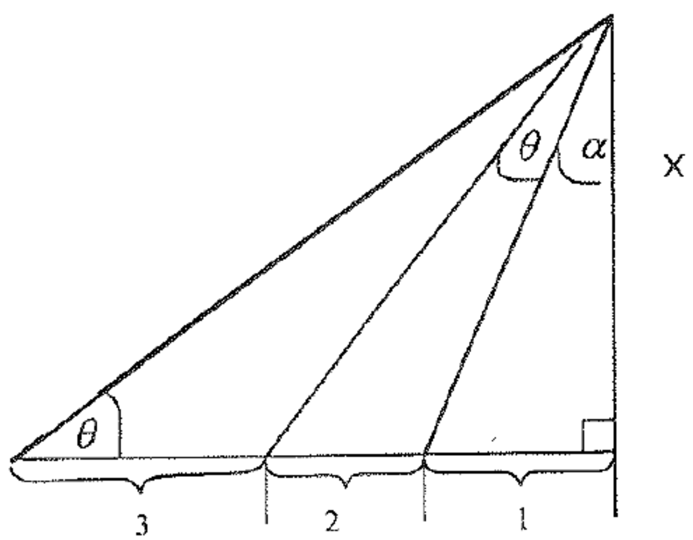
$$\cos^2\alpha - \text{tg}2\alpha - \frac{2}{15}$$

11. La tangente de un ángulo, x, del segundo cuadrante es -4/5. Halla las razones trigonométricas de los ángulos 2x y x/2.

12. Demuestra que si x, y, z son los ángulos de un triángulo, entonces $\text{tg}\left(x+y\right) + \text{tgz} = 0$.

13. Deduce una fórmula que permita expresar la $\text{tg}\left(x+y+z\right)$ en función de $\text{tgx}, \text{tgy}, \text{tgz}$. A partir de la fórmula anterior demuestra que si x, y, z son los ángulos de un triángulo cualquiera, entonces se cumple que $\text{tgx} + \text{tgy} + \text{tgz} = \text{tgx} \cdot \text{tgy} \cdot \text{tgz}$.

14. Determina el valor del ángulo θ:



Nota: calcula $\text{tg}\left(\theta+\alpha\right)$

15. Expresar $\dfrac{\operatorname{sen}3a}{\operatorname{sen}2a-\operatorname{sen}a}$ en función del $\cos a$.

16. Simplifica las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{\operatorname{sen}2x}{1+\cos 2x}$

b. $\dfrac{\operatorname{sen}2a}{1-\cos^2 a}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}2a}{\cos a}$

c. $\dfrac{\operatorname{sen}3a-\operatorname{sen}5a}{\operatorname{sen}3a+\cos 5a}$

d. $\dfrac{\operatorname{sen}2a}{1-\cos^2 a}\cdot\dfrac{1+\cos a}{\cos a}$

e. $\dfrac{\operatorname{sen}2a}{1-\cos^2 a}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}2a}{\cos a}$

f. $\dfrac{\operatorname{sen}(a+\pi)\operatorname{tg}\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cot(\pi-a)}$

g. $\dfrac{\operatorname{sen}2a+\operatorname{sen}4a}{\cos 2a-\cos 4a}$

h. $\dfrac{\left(\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}-\cos\dfrac{a}{2}\right)^2(1+\operatorname{sen}a)}{\operatorname{sen}2a}$

i. $\dfrac{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}7x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}$

j. $\dfrac{\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b}\cdot\dfrac{\cos a-\cos b}{\cos a+\cos b}$

k. $\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x$

l. $\operatorname{sen}(x-y)\cdot\cos x-\cos(x-y)\cdot\operatorname{sen}x$

m. $\cos(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha$

n. $(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2+2\cos(\alpha+\beta)$

o. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$

17. Demuestra las siguientes identidades:

a. $tg\alpha + \cot g\alpha = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$

b. $\frac{1}{1-\cos\alpha} + \frac{1}{1+\cos\alpha} = 2\operatorname{cosec}^2\alpha$

c. $\cot g^2\alpha = \cos^2\alpha + (\cot g\alpha \cdot \cos\alpha)^2$

d. $\frac{1}{\sec^2\alpha} = \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$

e. $\frac{tg\alpha + \sec^3\alpha - \sec\alpha}{\sec\alpha} = tg^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha$

f. $\cot g\alpha \cdot \sec\alpha = \operatorname{cosec}\alpha$

g. $\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$

h. $\frac{\operatorname{sen}x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2} tg2x$

i. $\frac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}x} + \cos^2\frac{x}{2} = \frac{5\cos x + 1}{2}$

j. $\cos(x + 45^o) \cdot \cos(x - 45^o) = \frac{1}{2}\cos 2x$

k. $\cos x + 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1$

l. $\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen}x} = \frac{4+4\cos x}{2\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x}$

m. $\operatorname{sen}\beta \cdot \cos(\alpha - \beta) + \cos\beta \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha$

n. $\cot g(\alpha + \beta) = \frac{\cot g\alpha \cdot \cot g\beta - 1}{\cot g\alpha + \cot g\beta}$

o. $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$

p. $\operatorname{sen}(a+b) \cdot \operatorname{sen}(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a$

q. $tgx + ctgx = \frac{2}{\operatorname{sen}2x}$

r. $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$

s. $\sec(a-b) = \frac{\sec a \cdot \sec b \cdot \csc a \cdot \csc b}{\csc a \cdot \csc b + \sec a \cdot \sec b}$

t. $\frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)} = tgb$

u. $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 4\operatorname{ctg}2x \csc 2x$

v. $\dfrac{2\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}2x} = \cos x - \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$

w. $\dfrac{\operatorname{sen}(a+b)}{\operatorname{sen}(a-b)} = \dfrac{\operatorname{tga}\operatorname{ctgb}+1}{\operatorname{tga}\operatorname{ctgb}-1}$

x. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right) - \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-a\right) = 2\operatorname{tg}2a$

18. Sabiendo que x es un ángulo agudo y que se verifica que $\cos(90^{\circ} - x) + \operatorname{cosec}x = \dfrac{5}{2}$, determina el valor de $\operatorname{tg}x + \sec x$.

19. Si $\operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha = 2$, demostrar que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$.

20. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a. $\operatorname{tg}x = 1$

b. $\operatorname{sen}^2 x + \cos x = 1$

c. $2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$

d. $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}x = 0$

e. $2\operatorname{sen}x \cdot \cos^2 x - 6\operatorname{sen}^3 x = 0$

f. $\cos(2x + 20^{\circ}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

g. $\operatorname{sen}^2 x + \dfrac{1}{\sec x} = \dfrac{5}{4}$

h. $2\cos x = 3\operatorname{tg}x$

i. $3\operatorname{cosec}x - 2\cos x \cdot \operatorname{cotg}x + 3 = 0$

j. $\cos x - \operatorname{tg}x = \sec x$

k. $3\sec x - 3\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{tg}x = -3$

l. $3\operatorname{cotg}x + 4\operatorname{sen}x = 2\cos x \cdot \operatorname{tg}x$

m. $\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0$

n. $-3\operatorname{sen}x + \cos^2 x = 3$

o. $\cos 5x - \cos x = 0$

p. $\operatorname{sen}x - 2\cos 2x = -\dfrac{1}{2}$

q. $\operatorname{sen}^4 x - 2\cos^4 x + 1 = 0$

r. $4\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2\cos x = 3$

s. $\text{sen}2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

t. $4\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

u. $8\text{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1 + \sec x$

v. $\text{tg}2x = -\text{tg}x$

w. $\cos 2x - \cos 6x = \text{sen}5x + \text{sen}3x$

x. $\text{sen}x + \cos x = \cos x(\text{sen}x + \cos x)$

y. $\left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right)^2 = \text{sen}2x$

21. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a. $\begin{cases} \text{sen}x + \text{sen}y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \text{sen}x - \text{sen}y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$

b. $\begin{cases} \text{sen}x - \text{sen}y = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2\text{sen}x = 1 - \cos y \\ 2\cos x = 1 + \cos y \end{cases}$

d. $\begin{cases} \text{sen}x + \text{sen}y = \dfrac{3}{2} \\ \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

e. $\begin{cases} \text{sen}(x+y) - \cos x \cos y = 0 \\ \text{sen}y = 0 \end{cases}$

PROBLEMAS

1. Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12% ¿Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7km por esa carretera?

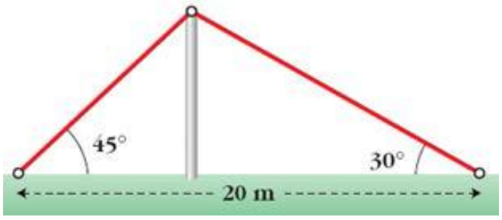
2. En una ruta de montaña, una señal indica una altitud de 785m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1.265m. Halla la pendiente media de esa ruta y el ángulo que forma con la horizontal.

3. La longitud del lado de un octógono regular es 12m. Hallar los radios de la circunferencia inscrita y circunscrita.

4. Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65°. ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?

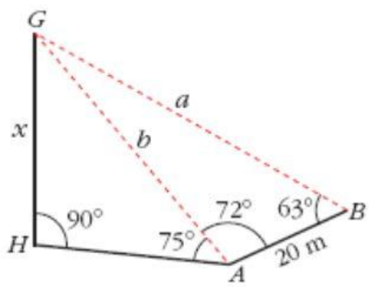
5. En un círculo de 15cm de radio, halla el área comprendida entre una cuerda de 20cm de longitud y el diámetro paralelo a ella.

6. Hemos colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta como muestra la figura. ¿Cuánto miden el mástil y el cable?

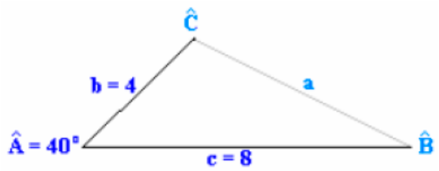


7. Una estatua de 2,5m está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15° y la estatua bajo un ángulo de 45°. Calcula la altura del pedestal.

8. Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto A? ¿Cuánto del punto B? ¿A qué altura está el globo?



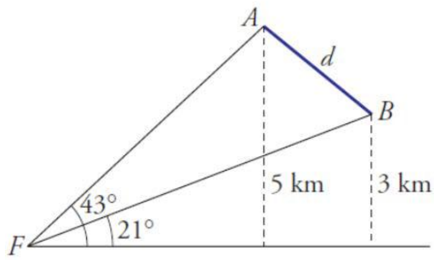
9. Resuelve el siguiente triángulo y calcula las medidas de su altura, mediana y bisectriz trazadas desde el vértice C.



10. Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127° . El primero sale a las 10h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11h 30min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde?

Nota: Nudo = milla / hora; milla = 1850 m

11. Desde un faro F se observa un barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y un barco B, bajo un ángulo de 21°. El barco A está a 5km de la costa, y el B, a 3km. Calcula la distancia entre los barcos.



12. Queremos calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles, A y B. Desde C y D tomamos los datos: CD = 300m, ADB = 25º, ACB = 32º, ACD =46º, BDC = 40º. Calcula AB.